Fiche d'exercices n^o 4

Exercice 1 : Formaliser en logique des prédicats :
- Un cheval est plus rapide qu'un chien.
- Il existe un lévrier qui est plus rapide que tout lapin
- Tout lévrier est un chien
- Harry est un cheval
- Ralph est un lapin
- La relation « être plus rapide que » est transitive.

Exercice 2 : Montrer que la propriété pour une relation binaire d'être un ordre est définissable en logique du premier ordre.

Exercice 3 : On utilise souvent en mathématiques le symbole $\exists!$ pour signifier "il existe un unique" x tel que.... Exprimer ce symbole à l'aide d'une formule du premier ordre

Exercice 4 : On considère comme domaine l'ensemble des participants à une soirée. On définit une relation binaire sur ces éléments de la façon suivante $x\mathcal{R}y$ si et seulement si x et y se sont serrés la main au cours de la soirée.

Exprimer par des formules du premier ordre les phrases suivantes :

1) x n'a serré la main de personne
2) x a serré la main de deux personnes qui se sont serré la main
3) x a serré la main d'au moins 2 personnes .
4) x a serré la main de exactement deux personnes.

Pensez vous que l'on puisse exprimer la phrase « x a serré la main de quelqu'un qui a serré la main de quelqu'un, qui a ... etc... qui a serré la main de y » ?

Exercice 5 : Représenter la phrase « Tout nombre entier naturel x a un successeur qui est inférieur ou égal à tout entier strictement supérieur à x » par une formule logique en utilisant les prédicats suivants :
- $entier(x)$ qui est vrai si et seulement si x est un entier
- $successeur(x, y)$ qui est vrai si et seulement si x est successeur de y
- $inf(x, y)$ qui est vrai si et seulement si $x \leq y$

Exercice 6 : On prend comme domaine l'ensemble des employés d'un restaurant. On suppose que chaque employé a un remplaçant.

On munit ce domaine d'un symbole de fonction unaire r et d'une constante a. $r(x)$ dénote le remplaçant de x et a désigne un employé nommé albert.

On a aussi les relations

$S(x)$ qui correspond à "x sert en salle"

$C(x)$ qui correspond à "x sait faire le café"

$O(x, y)$ quicorrespond à "x est sous les ordres de y"

1) Traduisez les énoncés suivants dans le en prédicats du premier ordre :
   a) Le remplaçant d'Albert ne sait pas faire le café.
   b) Tous les employés qui savent faire le café sont sous les ordres d'Albert.
   c) Aucun des employés qui ne servent pas en salle ne sont sous les ordres de quelqu'un qui sait faire le café.
   d) Au moins un employé est sous les ordres du remplaçant d'un employé qui sert en salle.
2) Exprimez en français les formules suivantes

a) $\forall x(O(x, r(a)) \Rightarrow S(x))$
b) $\exists x(C(x) \vee \neg C(r(x)))$
c) $\forall x(\exists y(O(y, x) \wedge C(y)) \Rightarrow C(x))$
d) $\neg \exists x(\forall y(C(y) \wedge S(y)) \Rightarrow O(y, x))$

Exercice 7 : On considère une signature composé d'une relation binaire $\mathcal{R}$ et d'un opérateur binaire f.

On veut étudier la formule du premier ordre suivante :

$$\forall x \forall y(\exists z\ (f(x, z) = y)) \Leftrightarrow \mathcal{R}(x, y)$$

1. Ici on définit une structure basée sur cette signature, dont le domaine est $\mathbb{N}$, où f désigne l'addition usuelle ($f(x, y) = x+y$), et où $\mathcal{R}$ designe la relation d'ordre usuelle ($x\mathcal{R}y$ interpreté par $x \leq y$).
   La formule précédente est-elle vraie ? Que dire si l'on remplace $\mathbb{N}$ par $\mathbb{Z}$?
2. Proposer d'autres structures dans lesquelles cette formule est vraie.

Exercice 8 : On considère un symbole de relation binaire $\mathcal{R}$, et les cinq formules :

1. $\forall x\ \forall y\ \forall z\ \ [\neg \mathcal{R}(x, x) \wedge (\mathcal{R}(x, y) \Rightarrow \neg \mathcal{R}(y, x)) \wedge (\mathcal{R}(x, y) \wedge \mathcal{R}(y, z) \Rightarrow \mathcal{R}(x, z))]$
2. $\exists x\ \forall y\ \mathcal{R}(x, y)$
3. $\exists x\ \forall y\ \mathcal{R}(y, x)$
4. $\forall x\ \exists y\ \ [\mathcal{R}(x, y) \wedge \forall z\ \ (\mathcal{R}(x, z) \Rightarrow (z = y \vee \mathcal{R}(y, z)))]$
5. $\forall x\ \forall y\ \ [\mathcal{R}(x, y) \Rightarrow \exists z\,(\mathcal{R}(x, z) \wedge \mathcal{R}(z, y))]$

Quelles formules sont vraies :
- sur $\mathbb{N}$ où $\mathcal{R}$ est interprétée par $<$?
- sur $\mathbb{Q}$ où $\mathcal{R}$ est interprétée par $<$?
- sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ où $\mathcal{R}$ est interprétée par $\subsetneq$?

Exercice 9 : On considère l'alphabet suivant :
- Symboles de fonction : $f\ :\ 2$, $g\ :\ 1$ (notation signifiant : f est d'arité 2, g d'arité 1)
- Constantes : a, b
- Symboles de prédicats : $p\ :\ 1$, $q\ :\ 2$

On considère les suites des symboles suivantes :

1. $g(f(x, y)) \vee p(a)$
2. $\exists x\ q(a, y) \wedge p(f(a, b)) \Rightarrow p(x)$
3. $\forall x\ \exists y\ p(x) \wedge q(f(y, b))$
4. $p(g(z)) \vee \forall x\ \exists z\ q(a, y)$
5. $\exists x\ q(f(x, y), g(z))$
6. $\forall y\ \forall x\ q(x, y)$

Quelles sont les suites de symboles qui ne sont pas des formules ? Donner l'ensembles des variables libres et l'ensemble des variables liées de chaque formule.

Exercice 10 : On considère le langage du premier ordre composé d'un symbole de fonction f d'arité 2, du symbole binaire de l'égalité $=$ (on l'utilisera avec la notation infixe habituelle) et d'un symbole de relation $\mathcal{R}$ d'arité 2. Les variables sont notées $x, y, z \ldots$ Soit l'interprétation suivante :
- le domaine est $\mathbb{Z}$ (ensemble des entiers relatifs),
- l'interprétation de f est l'addition sur $\mathbb{Z}$
- l'interprétation de $\mathcal{R}$ est la relation $<$,
- l'interprétation de $=$ est l'égalité sur $\mathbb{Z}$.

On rappelle que la valeur de vérité d'une formule peut dépendre d'une valuation. Quelle est la valeur de vérité de chacune des trois formules ci-dessous dans cette interprétation ?

1. $\forall x\ \exists z\ (f(z,y)\ =\ x)$
2. $\exists x\ (\mathcal{R}(x,y) \wedge \mathcal{R}(y, f(x,x))))$
3. $\forall x(\mathcal{R}(x,y) \Rightarrow \mathcal{R}(f(x,x),y))$

Exercice 11 : On considère le langage du premier ordre composé de deux symboles de relation P et Q d'arité 1. Soit A la formule $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ et B la formule $\exists x(P(x) \Rightarrow Q(x))$. On se propose d'étudier les modèles dans lesquels ces formules sont vraies. Soit D un ensemble non vide, support du modèle. On note D_P l'ensemble des éléments de D tels que $I_P(d) = \top$ (où I_P est l'interprétation de P sur D). De même D_P est l'ensemble des éléments de D tels que $I_Q(d) = \top$ (où I_Q est l'interprétation de Q sur D).

1. Quelles conditions doivent vérifier D_P et D_Q pour que la formule A soit vraie dans le modèle défini par D, D_P et D_Q ?
2. Quelles conditions doivent vérifier D_P et D_Q pour que la formule B soit vraie dans le modèle défini par D, D_P et D_Q ?

Exercice 12 : Logique du premier ordre sur les graphes On appelle graphe un couple (V,E) avec V un ensemble de sommets et $E \subset V \times V$ un ensemble d'arêtes reliant ces sommets. On considère la signature contenant l'égalité et le prédicat binaire e. Tout graphe $G = (V,E)$ définit alors une interprétation de cette signature de domaine V, et dont le prédicat e est défini par $e(x,y) \Leftrightarrow (x,y) \in E$. On peut alors exprimer en logique des propriétés sur les graphes : par exemple, un graphe *transitif* est un graphe tel que

$$(x,y) \in E \wedge (y,z) \in E \Rightarrow (x,z) \in E$$

Les graphes transitifs correspondent exactement aux interprétations (provenant de graphes) dans lesquelles la formule

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ e(x,y) \wedge e(y,z) \Rightarrow e(x,z)$$

est vraie. Décrire par des formules du premier ordre sur cette signature les propriétés suivantes :

- x et y sont reliés par un chemin de longueur au plus k (k étant fixé)
- x et y sont reliés par un chemin strict de longueur k
- x et y sont reliés par i chemins distincts de longueur au plus k (i et k étant fixés)
- Tout cycle de longueur 4 a une corde
- Tout sommet a au plus une arête incidente
- Tout sommet a exactement une arête incidente

Peut-on décrire la propriété « x et y sont reliés par un chemin fini » ?

Exercice 13 : Montrer qu'on peut exprimer en logique du premier ordre sur la signature $\langle + : 2, \times\ : 2, \leq : 2\rangle$ l'opération $E(\sqrt{(}x))$.

Exercice 14 : Formes prénexes

- On dit qu'une formule est sous forme *prénexe polie* si tous ses quantificateurs sont en tête de la formule, et qu'ils lient tous des variables différentes. Montrer que toute formule de la logique du premier ordre peut se mettre sous forme prénexe. Il pourra être utile de remarquer que l'on peut renommer les variables liées d'une formule sans modifier celle-ci.
- On dit qu'une formule sous forme prénexe polie est sous forme *prénexe alternée* si après tout quantificateur universel se trouve un quantificateur existentiel, et réciproquement. Montrer que toute formule de la logique du premier ordre peut se mettre sous forme prénexe alternée.