Fiche d'exercices n° 3

1 Pour débuter

Exercice 1 : Lesquels des raisonnements suivants sont formalisables en logique propositionnelle ? Si c'est le cas, donnez une formalisation et vérifiez si le raisonnement est effectivement correct.

1. Si j'étudie la logique, alors je serai heureux et sage ;
   je serai heureux et sage ;
   donc j'étudie la logique.

2. Napoléon était allemand ;
   les Allemands sont européens ;
   donc Napoléon était européen.

3. Napoléon était français ;
   tous les Français sont européens ;
   donc Gengis Khan était autrichien.

4. Si Napoléon avait été chinois, alors il aurait été asiatique ;
   Napoléon n'était pas asiatique ;
   donc il n'était pas chinois.

Exercice 2 : Parmi les formules suivantes, lesquelles sont valides, satisfiables mais pas valides, contradictoires ? Si une formule est satisfiable mais pas valide, donnez un interprétation qui la satisfait et une qui ne la satisfait pas.

1. $p \wedge \neg p$
2. $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
3. $(p \wedge \neg p) \Rightarrow q$
4. $p \wedge (p \Rightarrow q)$
5. $p \Rightarrow (p \vee q)$
6. $(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
7. $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$
8. $((p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
9. $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \neg q)) \Rightarrow \neg p$
10. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (\neg(p \Rightarrow r) \wedge \neg(q \Rightarrow r))$
11. $(p \vee q \Rightarrow r) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r))$
12. $(p \vee q \Rightarrow r) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r))$

Exercice 3 : Un père dit à son fils : « tu finis ta soupe ou tu iras au lit immédiatement ». Le fils de dépêche de finir son assiette et son père l'envoie au lit aussitôt. Le père est-il en un menteur ?

Exercice 4 : Montrer que la formule $\theta = [(q \vee \neg p) \Rightarrow (\neg\neg q \vee \neg p)] \wedge [(\neg\neg q \vee \neg p) \Rightarrow (\neg p \vee q)]$ est équivalente à $\top$.

2 Modélisation

Exercice 5 : Ahmed, Bruno, Chen et Dimitri habitent le même batiment dans quatre étages différents. Tous ont un animal différent. Ahmed n'aime pas les chats, Chen habite juste au dessous de Bruno. Celui qui a le poisson habite au rez-de-chaussée. Ahmed et Dimitri n'habitent pas un juste au dessous de l'autre. Celui qui a le lapin habite à un étage plus haut que Bruno. Exprimez ces contraintes en logique propositionnelle et dites qui a le serin.

Exercice 6 :

1. On veut prendre une photo de groupe avec Marie, Sofine, Pawel, et Kim. Pour prendre la photo, les personnes sont à placer sur une ligne, une à côté de l'autre. Marie veut absolument être placée à côté de Pawel et à côté de Kim, et Kim veut absolument être placé à côté de Sofine. Sofine et Pawel n'ont pas exprimé une préférence.

   Construire une formule propositionnelle qui est vraie si et seulement si un tel placement existe. Vous avez le droit d'écrire une formule qui n'est pas en forme conjonctive normale. Procéder en deux temps : construire d'abord une formule qui correspond à un placement des quatre personnes sur une ligne, puis une deuxième formule qui exprime qui doit être placé à côté de qui.
2. On généralise maintenant le problème de la question (1) : On a donné un groupe G de n personnes, et une fonction v qui donne pour chaque personne du groupe un ensemble de voisins demandés (qui peut être vide). Pour l'exemple de la question (1) on aurait

$$\begin{array}{rcl} n & = & 4 \\ G & = & \{\text{Marie}, \text{Sofine}, \text{Pawel}, \text{Kim}\} \\ v(\text{Marie}) & = & \{\text{Pawel}, \text{Kim}\} \\ v(\text{Kim}) & = & \{\text{Sofine}\} \\ v(\text{Sofine}) = v(\text{Pawel}) & = & \emptyset \end{array}$$

   Donner la construction générale de la formule propositionnelle qui est vraie si et seulement un placement des personnes existe qui satisfait tous les souhaits.

3 Autour des formes normales conjonctives

Rappel : L'application des règles de réécriture suivantes à une formule propositionnelle permet d'obtenir une *forme normale conjonctive* :

1. $\neg\neg F \;\to\; F$
2. $\neg\top \;\to\; \bot$
3. $\neg\bot \;\to\; \top$
4. $\neg(F_1 \wedge F_2) \;\to\; (F_1 \vee F_2)$
5. $\neg(F_1 \vee F_2) \;\to\; (F_1 \wedge F_2)$
6. $(F_1 \Rightarrow F_2) \;\to\; (\neg F_1 \vee F_2)$
7. $(F \vee \bot) \;\to\; F$ et $(\bot \vee F) \;\to\; F$
8. $(F \vee \top) \;\to\; \top$ et $(\top \vee F) \;\to\; \top$
9. $(F \wedge \bot) \;\to\; \bot$ et $(\bot \wedge F) \;\to\; \bot$
10. $(F \wedge \top) \;\to\; F$ et $(\top \wedge F) \;\to\; F$
11. $(F_1 \wedge F_2) \vee F_3 \;\to\; (F_1 \vee F_3) \wedge (F_2 \vee F_3)$ et $F_3 \vee (F_1 \wedge F_2) \;\to\; (F_3 \vee F_1) \wedge (F_3 \vee F_2)$

Sous cette forme, la formule est une *conjonction de clauses*, une clause étant une formule sans apparition de $\wedge$.

Exercice 7 : Mettre sous forme normale conjonctive les formules suivantes :
1. $\psi_1 \;=\; (p \wedge \neg((q \vee r) \Rightarrow p)) \vee s$
2. $\psi_2 \;=\; (p_1 \wedge q_1) \vee (p_2 \wedge q_2)$
3. $\psi_3 \;=\; \neg((p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (r \Rightarrow s))$

Exercice 8 : Calculer par récurrence sur n la forme normale conjonctive de $\phi_n \;=\; (p_1 \wedge q_1) \vee \cdots \vee (p_n \wedge q_n)$.

Exercice 9 : Que penser de l'unicité d'une forme normale conjonctive ?

4 Résolution du problème SAT

Rappel : le problème SAT consiste à déterminer si une formule logique donnée est satisfiable. Usuellement, un algorithme résolvant SAT prend en entrée une liste de clauses S (qui correspond à toutes les closes apparaissant dans la forme normale conjonctive de la formule étudiée) et renvoie un booléen.

Exercice 10 : L'objectif de cet exercice est d'étudier une méthode de résolution de SAT appelée méthode DPLL (Davis-Putnam-Logemann-Loveland). C'est une méthode de recherche par force brute, mais avec tout de même quelques optimisations « évidentes » (par rapport à celles des méthodes plus récentes et plus efficaces). Considérons un ensemble de clauses S.
1. On note $S[A := \top]$ le remplacement dans S de A par $\top$, et $S[A := \bot]$ son analogue pour $\bot$. Comment peut-on simplifier les clauses de $S[A := \top]$ et $S[A := \bot]$ (en s'inspirant des règles de réécriture pour la mise en forme normale) ?
2. Expliquer pourquoi S est satisfiable si et seulement si $S[A := \top]$ l'est ou $S[A := \bot]$ l'est (on ne demande pas une preuve formelle).
3. On appelle *tautologie* une clause contenant un littéral et sa négation. Quel traitement des tautologies proposez-vous ?
4. Que faire si l'on trouve une clause réduite à un littéral ?
5. On dit qu'un littéral est *pur* s'il n'apparaît jamais (ou toujours) nié dans S. Quel traitement des littéraux purs proposez-vous ?
6. En assemblant les résultats des questions précédentes, proposez un algorithme de résolution de SAT. Vous devriez retrouver celui correspondant à la méthode DPLL.
7. Utilisez une mise en forme normale conjonctive et cet algorithme pour déterminer la satisfiabilité de la formule suivante :

$$[p \wedge (q \vee (r \wedge s) \vee \neg s)] \vee \neg q$$

Exercice 11 : (difficile) Montrer que le problème SAT est équivalent au problème 3-SAT, dans lequel les clauses en entrée doivent contenir au plus trois variables.