TD 1 – Ensembles et relations

1 Ensembles et Fonctions

Exercice 1 : Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives ou bijectives ?

a) $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$

b) $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & 2n \end{array} \right.$

c) $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array} \right.$

d) $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \right.$

Que dire si f est définie de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$; de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$?

e) $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x.y) \end{array} \right.$

Exercice 2 : Soient E et F deux ensembles et soit $f : E \to F$ une application.
Pour une partie A de E, on définit l'image directe de A par f, notée $f(A)$, de la façon suivante :

$$f(A) = \{y \in F;\ \exists x \in A \text{ tel que } \ f(x) = y\} = \{f(x), x \in A\}.$$

De façon similaire, l'image réciproque de $A' \subset F$ est définie par :

$$f^{-1}(A') = \{x \in E; f(x) \in A'\}.$$

Soient A et B (resp. A' et B') deux parties de E (resp. F), a-t-on, en général :

a) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$? et si f est injective ?

b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$?

c) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$?

d) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$?

Exercice 3 : Montrer que si f et g sont injectives (resp. surjectives) alors $g \circ f$ est injective (resp. surjective).

Exercice 4 : Soit E un ensemble et $f : E \to E$ vérifiant $f \circ f = f$: Montrer que si f est injective, alors f est l'identité.

Exercice 5 : Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle *fonction caractéristique* de A l'application $\chi_A : \left| \begin{array}{lcl} A & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & 1 \text{ si } x \in A \\ x & \longmapsto & 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$

Soient A et B deux parties de E et leurs fonctions caractéristiques χ_A et χ_B . Quels sont les ensembles dont les fonctions caractéristiques sont :

a) $1 - \chi_A$

b) $\chi_A \cdot \chi_B$

c) $\chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B$

Exercice 6 :

1. Soit $f : B \to C$ une fonction. Montrer que :

$$f \text{ injective} \iff (\forall g, h : A \to B,\ f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h)$$

2. Soit $f : A \to B$ une fonction. Montrer que :

$$f \text{ surjective} \iff (\forall g, h : B \to C,\ g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h)$$

2 Relations

Exercice 7 : Examiner si les relations suivantes sont réflexives, symétriques, transitives ou antisymétriques.

a) La relation d'orthogonalité pour les droites du plan.

b) La relation $a^2 + a = b^2 + b$ pour les entiers relatifs.

Donner la classe d'équivalence de 0 pour la relation du b)

Exercice 8 : Parmi les relations suivantes dans $\mathbb{N}$, lesquelles sont des relations d'équivalence ?

a) $x \mathcal{R} y$ si x est divisible par y,

b) $x \mathcal{R} y$ si $x + y$ est divisible par 2

c) $x \mathcal{R} y$ si $x - y$ est divisible par 3

d) $x \mathcal{R} y$ si $x + y$ est divisible par 3

Exercice 9 : Parmi les relations suivantes dans $\mathbb{R}$, lesquelles sont des relations d'équivalence ?

a) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x.\mathrm{e}^y = y.\ \mathrm{e}^x$

b) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x - y| \leq 1$

c) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x - y) \in \mathbb{Z}^*$

d) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$

Exercice 10 : Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E qui est reflexive et transitive. On définit les deux relations $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x)$ et $x\mathcal{T}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x)$.
$\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont-elles des relations d'équivalence?

Exercice 11 : Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbb{R}^2$ définie par : $(x, y)\mathcal{R}(x', y') \Leftrightarrow x + y = x' + y'$.

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

b) Trouver la classe d'équivalence du couple $(0, 0)$ et $(0, 1)$.

Exercice 12 : Soit E un ensemble, on dénote par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

a) Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathcal{P}(E)$ définie par : $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow (A = B$ ou $A = E \setminus B)$.
Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

b) Pour X une partie de E, on définit une relation $\mathcal{R}_X$ sur $\mathcal{P}(E)$ par : $A\mathcal{R}_X B \Leftrightarrow (A \cap X = B \cap X)$.
Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence et donner les classes de $\emptyset$ et E.

Exercice 13 : Soit l'application suivante : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x + 2y \end{array} \right.$

a) Cette application est-elle injective, surjective ?

b) Quel est $E_0 = f^{-1}(0)$?

c) Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $\mathbb{R}^2$ définie par : $x\ \mathcal{R}y \Leftrightarrow (x - y) \in E_0$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

d) Quelle est la classe d'équivalence de $(1, 1)$?

3 Relations d'ordre

Exercice 14 : Dans $\mathbb{N}^*$ ordonné par la relation divise, donner un minorant et un majorant (s'ils existent)

a) de l'ensemble des nombres premiers ;

b) de l'ensemble des diviseurs de 60.

Trouver, si elles existent, la borne supérieure et la borne inférieure de ces ensembles

Exercice 15 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On définit une relation $\preceq_f$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \preceq_f y \iff f(y) - f(x) \geq |y - x|$$

1. Montrer que $\preceq_f$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}/$.
2. Montrer que $\preceq_f$ est totale si et seuelemnt si $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |f(y) - f(x)| \geq |y - x|$.
3. A quoi la relation $\preceq_{Id_{\mathbb{R}}}$ est-elle égale?

Exercice 16 : Soit E l'ensemble des couples (I, f) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On définit sur E une relation $\preceq$ par :

$$(I, f) \preceq (J, g) \iff I \subset J \text{ et } g_{|I} = f.$$

Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur E.

Exercice 17 : On considère les deux relations sur les éléments de $\mathbb{R}^2$ (le second s'appelle communément ordre lexicographique).

$$(x, y) \preceq (x', y') \iff x \leq x' \text{ et } y \leq y'$$

$$(x, y) \preceq_{lex} (x', y') \iff x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')$$

a) Montrer que ce sont effectivement des relations d'ordre.

b) Sont-elles totales?

c) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. représenter graphiquement l'ensemble de ses majorants et minorants pour les deux ordres.

d) Montrer que $A = \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ majorée pour $\preceq_{lex}$, mais qu'elle n'a pas de borne supérieure.

Exercice 18 : Soient E un ensemble et R l'ensemble des relations d'équivalence définies sur E. On dit que la relation $\mathcal{R}$ est plus fine que $\mathcal{R}_0$ si : $\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \Rightarrow x\mathcal{R}_0 y)$. On définit alors une relation $\prec$ sur l'ensemble R en posant : $\mathcal{R} \prec \mathcal{R}_0$ si $\mathcal{R}$ est plus fine que $\mathcal{R}_0$

a) Montrer que la relation $\prec$ est un ordre sur R.

b) Montrer que $\mathcal{R}$ est plus fine que $\mathcal{R}_0$ si et seulement si toute classe modulo $\mathcal{R}_0$ est réunion de classes modulo $\mathcal{R}$.

c) $R*$ possède-t-il un plus grand et un plus petit élément.

d) Soient $E = \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}^*$. Quelles sont les congruences plus fines que la congruence modulo n?