TD d'Éléments d'Algorithmique n° 2
(Correction)

Énumérations

Exercice 1. *Fonctions de* $\{1, \ldots, n\}$ *dans* $\{1, \ldots, m\}$.

Pour $n, m \in \mathbb{N}$ donnés, soit F_m^n l'ensemble de toutes les fonctions de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, m\}$

1. Quelle est la cardinalité de F_m^n ?

Soit T_m^n l'ensembles des tableaux d'entiers de longueur n, dont les éléménts appartiennent à $\{1, 2, \ldots, m\}$.

Pour $f \in F_m^n$ donnée, soit $T_f \in T_m^n$ le tableau tel que pour tout $1 \leq i \leq n$, $T_f[i] = f(i)$.

2. Constater que la fonction $f \mapsto T_f$ est une bijection entre F_m^n et T_m^n.

Les tableaux représentant ainsi les éléments de F_m^n peuvent être lus comme des nombres à n chiffres en base m, et ordonnées en tant que tels. Il s'agit de *l'ordre lexicographique* sur le séquences de n nombres compris entre 1 et m, le premier élément à partir de la gauche, c.à.d. l'élément d'indice 1 du tableau, étant le plus significatif. Le fait que 0 n'apparaisse dans ces séquences n'a pas d'importance. Dans la suite, $\preceq_m^n$ désigne cet ordre.

3. Montrer que $\preceq_m^n$ est un ordre total, et donner le plus petit et le plus grand élément de T_m^n relativement à $\preceq_m^n$.
4. Ecrire un algorithme qui, étant donnés un élément T de T_m^n différent du plus grand élément de T_m^n rélativement à $\preceq_m^n$, renvoit son successeur relativement à $\preceq_m^n$, c.à.d. le plus petit élément de l'ensemble des majorants de T.
5. Ecrire un algorithme de "génération exhaustive" de T_m^n, c.à.d. un programme qui renvoit (ou affiche) tous les éléments de T_m^n dans l'ordre $\preceq_m^n$.

Correction :

⋆⋆ **Exercice 2.** *Tableaux d'inversions.*

Une permutation σ a une inversion à la place (i, j) si le couple (i, j) est tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. On dit aussi que $(\sigma(i), \sigma(j))$ est une inversion de σ.

- Écrire à quelles places la permutation 3 2 4 1 a des inversions.

Le tableau d'inversions d'une permutation σ est le nombre d'inversions commençant à la place i, pour $i = 1, \ldots, n$.

- Donner le tableau d'inversions de la permutation 6 3 2 1 5 4 7.
- Quelles sont les propriétés caractéristiques d'un tableau d'inversion à n éléments ? Donner une définition de tableau d'inversion.

Il y a une bijection entre les tableaux d'inversions et l'ensemble des permutations, c.à.d. à chaque tableau correspond un et un seul tableau d'inversions et viceversa. En effet à partir d'un tableau d'inversion on peut reconstruire la permutation en lisant le tableau de gauche à droite : l'entrée courante du tableau indique parmi les éléments encore non placés combien sont plus petits que l'élément recherché. Ainsi dans l'exemple du tableau 5,2,1,0,1,0,0, le 5 en première position indique que $\sigma(1)$ est plus grand que 5 éléments parmi $\{1,2,3,4,5,6,7\}$, c'est-à-dire que $\sigma(1) = 6$. Puis le 2 indique que $\sigma(2)$ est plus grand que 2 éléments parmi $\{1,2,3,4,5,7\}$, c'est-à-dire que $\sigma(2) = 3$, etc...

- Écrire un algorithme qui prend un tableau d'inversion et qui reconstruit la permutation associée selon la bijection ci-dessus.
- Lister tous les tableaux d'inversion à 3 éléments dans l'ordre lexicographique et le permutations correspondantes par la bijection décrite ci dessus.
- Écrire un algorithme qui engendre tous les tableaux d'inversion à n éléments dans l'ordre lexicographique.
- En utilisant la bijection ci-dessus traduire l'algorithme du point précédent sur les permutations à n éléments.

Correction :

Exercice 3. *Involutions.*

Une permutation σ de $\{1,\dots,\mathsf{n}\}$ est dite *involutive* (ou est appelée une *involution*) si pour tout $i \in \{1,\dots,\mathsf{n}\}$, $\sigma(\sigma(i)) = i$. Elle est dite sans point fixe si pour tout $i \in \{1,\dots,\mathsf{n}\}$, $\sigma(i) \neq i$. Une permutation σ de $\{1,\dots,\mathsf{n}\}$ sera représentée par un tableau S tel que $\mathsf{S}[i-1] = \sigma(i)$ pour $i \in \{1,\dots,\mathsf{n}\}$.

1. Les permutations suivantes de $\{1,\dots,4\}$ sont-elles involutives ? Sont-elles sans point fixe ?

$$[1,2,3,4] \qquad [2,1,4,3] \qquad [4,3,2,1] \qquad [1,3,2,4]$$

2. Écrivez un algorithme qui prend en entrée un entier $\mathsf{n} > 0$ et un tableau S représentant une permutation σ de $\{1,\dots,n\}$, et qui retourne 1 si σ est involutive et 0 sinon.
3. Écrivez un algorithme qui prend en entrée un entier $\mathsf{n} > 0$, et qui énumère toutes les involutions de $\{1,\dots,\mathsf{n}\}$, dans l'ordre lexicographique.
4. ⋆ Combien y a-t-il d'involutions de $\{1,\dots,\mathsf{n}\}$ sans point fixe ?On séparera le cas n pair du cas n impair.

Correction :

TODO

1.
2.
3. si n est pair, $(\mathsf{n}-1)(\mathsf{n}-3)\cdots 1 = \frac{(n-1)!}{2(n/2-1)!}$, et 0 sinon.

Exercice 4. *Permutations circulaires.*

Une permutation σ de $\{1,\dots,\mathsf{n}\}$ est dite *circulaire d'ordre* k (ou est appelée un k-*cycle*) s'il existe k entiers distincts $a_1,\dots,a_\mathsf{k}$ dans $\{1,\dots,\mathsf{n}\}$, tels que $\sigma(a_i) = a_{i+1}$ pour $i \in \{1,\dots,\mathsf{k}-1\}$ et $\sigma(a_\mathsf{k}) = a_1$, et si pour tout $j \notin \{a_1,\dots,a_n\}$, $\sigma(j) = j$. Une permutation est dite *circulaire* (ou est appelée un *cycle*) s'il existe $\mathsf{k} \in \{2,\dots,n\}$ telle qu'elle est circulaire d'ordre k. Une permutation σ de $\{1,\dots,\mathsf{n}\}$ sera représentée par un tableau S tel que $\mathsf{S}[i-1] = \sigma(i)$ pour $i \in \{1,\dots,\mathsf{n}\}$.

1. Énumérez à la main les 2-cycles de $\{1,2,3,4\}$, dans l'ordre lexicographique. Faites de même pour les 3-cycles et les 4-cycles.
2. Écrivez un algorithme qui prend en entrée un entier $\mathsf{n} > 0$, et qui énumère tous les 2-cycles de $\{1,\dots,n\}$ dans l'ordre lexicographique.

3. Écrivez un algorithme similaire pour les 3-cycles.

⋆ 4. Écrivez un algorithme qui prend en entrée un entier $\mathsf{n} > 0$ et un entier $\mathsf{k} > 0$, et qui énumère tous les k-cycles de $\{1, \ldots, n\}$, dans l'ordre lexicographique.

⋆⋆ 5. Écrivez un algorithme qui prend en entrée un entier $\mathsf{n} > 0$, un entier $\mathsf{k} \in \{2, \ldots, n\}$ et un tableau S représentant une permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$, et qui retourne 1 si σ est un k-cycle et 0 sinon.

6. En utilisant l'algorithme précédent, écrivez un algorithme qui prend en entrée un entier $\mathsf{n} > 0$ et un tableau S représentant une permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$, et qui retourne 1 si σ est un cycle et 0 sinon. Cette question ne nécessite pas de savoir faire la question précédente.

Correction :

TODO