

# Etude du trafic routier par deux méthodes

Charles Grellois

17 novembre 2008

## 1 Introduction

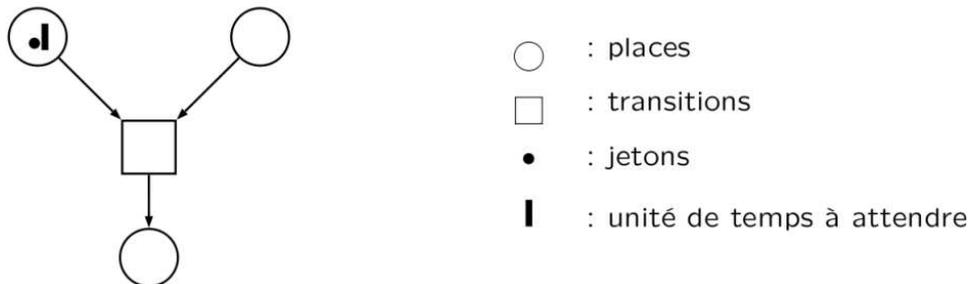
Le trafic routier est un phénomène hautement non linéaire et difficile à modéliser efficacement étant donné le nombre de paramètres des systèmes. Nous allons étudier deux situations fondamentales pour la compréhension de celui-ci : le cas d'une route circulaire "idéale" et celui d'une telle route munie d'un retardateur en un point (feu de trafic ...), à l'aide de deux outils : les algèbres tropicales appliquées aux réseaux de Petri et les automates cellulaires.

## 2 Préliminaires théoriques

### 2.1 Algèbres tropicales et réseaux de Petri

Pour maximiser des quantités à un instant donné, on s'intéresse aux facteurs limitants, l'opération min apparaîtra donc régulièrement. On considère donc l'algèbre min-plus ( $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \oplus, \otimes$ ), où  $\oplus$  représente min et  $\otimes$  l'addition usuelle. On forme ainsi un semi-anneau idempotent non intègre, *i.e.* un anneau à l'inversibilité pour  $\oplus$  près, et où l'idempotence :  $x \oplus x = x$  "remplace" la simplification habituelle. On note  $\epsilon = +\infty$  le zéro et  $e = 0$  l'unité. On définit de manière analogue un produit matriciel min-plus.

Les réseaux de Petri sont un ensemble de places et de transitions reliées par des arcs orientés; une place n'est reliée qu'à des transitions et réciproquement. Une place peut contenir des jetons, symbolisant des quantités, et des bâtonnets, indiquant le temps que doit passer un jeton dans la place avant de ne pouvoir la quitter. Lorsque chaque place amont d'une transition contient un jeton disponible (satisfaisant la condition temporelle imposée par les bâtonnets), la transition est *activée* : un jeton disponible est prélevé dans chaque place amont, et un jeton est créé dans chaque place aval.



On peut plus généralement définir un réseau de Petri comme un quadruplet  $(P, Q, H, M)$  avec  $P$  un ensemble de places,  $Q$  de transitions,  $H$  une matrice de pondération en quantités et en temps, et  $M$  une matrice de marquage initial, indiquant la répartition initiale des jetons. On peut aussi voir  $M$  comme matrice décrivant un graphe, appelé graphe de précédence de  $A$ , noté  $G(A)$ .

Les équations de fonctionnement auxquelles amènent les réseaux de Petri sont souvent du type  $X = (H \otimes X) \oplus M$ . Si  $A$  est à coefficients positifs, la solution en est l'étoile de Kleene de  $A$  :  $H^* = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} H^n = \bigoplus_{n=0}^{m-1} H^n$  ( $m$  étant le nombre d'arcs de  $G(A)$ ).

D'autres propriétés intéressantes existent : si  $G(A)$  est fortement connexe,  $A$  admet une unique valeur propre  $\lambda$ , et pour un réseau de Petri  $\lambda = \min_{c \in C} \frac{|c|_a}{|c|_t}$  (minimum du nombre de jetons divisé par le nombre de retardeurs sur l'ensemble des chemins). De plus, il existe  $N$  inférieur à la dimension de  $A$  et  $K$  tels que  $\forall k \geq K, A^{k+T} = \lambda^T \otimes A^k$ . Et pour finir,  $\lambda$  coïncide avec le débit asymptotique du graphe (nombre moyen de jetons déplacés par tour d'horloge). Les propriétés conjuguées de min-plus et des réseaux de Petri assurent donc de l'établissement d'un régime permanent, indépendant du marquage initial.

## 2.2 Automates cellulaires pour le trafic

Un automate cellulaire est un ensemble de cellules en dimension  $n$ , qui peuvent prendre deux états : "mortes" ou "vivantes". Le temps est discrétisé, et à chaque tour d'horloge on applique des règles pour déterminer la configuration au tour suivant. Pour ce qui est du trafic, on peut modéliser une route circulaire par  $n$  cases (la dernière étant reliée à la première), où une case contient une voiture si elle est "vivante"; on stocke aussi la vitesse et la probabilité de freinage de chaque voiture. Deux modèles de règles vont nous intéresser ici.

Le premier est le modèle de Nagel-Schreckenberg (NaSch), modèle historique, dont les règles sont les suivantes :

1. *accélération* : si  $v < v_{max}$ ,  $v \leftarrow v + 1$
2. *décélération* : si il existe un autre véhicule à une distance  $d < v$ ,  $v \leftarrow d - 1$
3. *freinage aléatoire* : avec une probabilité  $f$ ,  $v \leftarrow v - 1$
4. *mouvement* : les véhicules avancent

J'ai implémenté ce modèle comme une matrice  $r \times 3$  : une route de  $r$  cases à 3 variables : présence d'un véhicule, sa vitesse, sa probabilité de freinage. J'obtiens une complexité en  $O(ntr)$ .

Le deuxième modèle, le modèle BLM (2000), implémente l'anticipation des conducteurs. Il nécessite une nouvelle variable  $b_n$  valant 1 si la  $n$ -ième voiture freine, 0 sinon. On introduit  $t_h = \frac{d_n}{v_n}$ ,  $t_s \in [6, 11\text{secondes}]$  le temps anticipé par le conducteur de la  $n$ -ième voiture. Les nouvelles règles sont :

1. *paramètre de freinage* :  $p = \begin{cases} p_b & \text{si } b_{n+1} = 1 \text{ et } t_h < t_s \\ p_0 & \text{si } v_n = 0 \\ p_d & \text{sinon} \end{cases}$
2. *accélération* : comme NgSch
3. *décélération* :  $v_n(t+1) = \min(d_n^{eff}, v_n(t))$  et  $d_n^{eff} = d_n + \max(\underbrace{\min(d_{n+1}, v_{n+1})}_{v_{anticipée}} - \underbrace{p_{securite}}_{\text{parametre} \geq 1}, 0)$
4. *freinage aléatoire* :  $v_n$  est réduite d'une unité avec une probabilité  $p$ , et dans ce cas  $b_n \leftarrow 1$
5. *mouvement* : comme dans NgSch

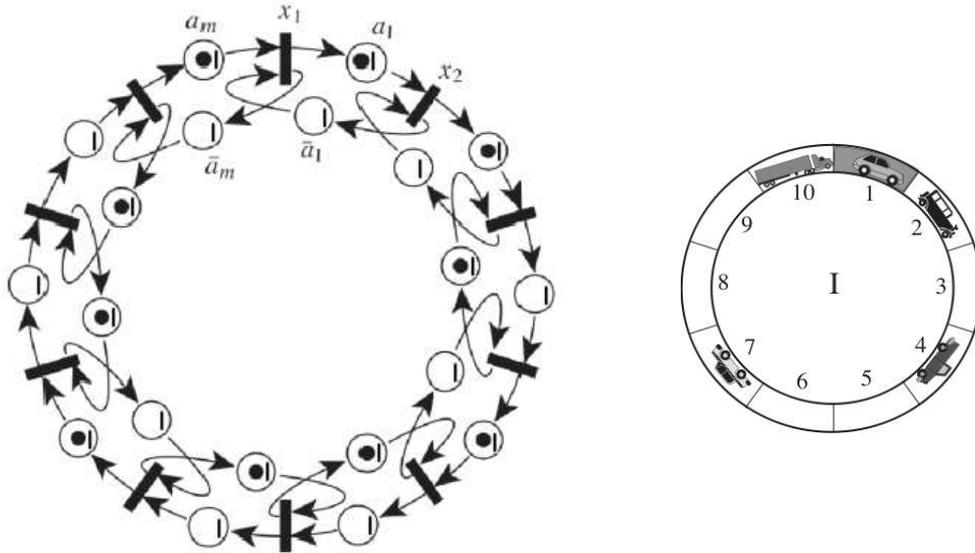
où  $p_b$  est une probabilité de freinage correspondant au cas où les autres véhicules freinent,  $p_0$  une probabilité permettant de régir la reprise du trafic après un embouteillage et  $p_d$  une probabilité de freinage modélisant l'aspect presque aléatoire du freinage en régime non embouteillé.  $p_{securite}$  est un paramètre fixant une distance de sécurité, qui doit être supérieur à 1 pour empêcher les accidents.  $d_n^{eff}$  est maintenant une distance *anticipée*.

J'ai implémenté cette fois-ci le modèle sous forme de listes à n éléments : liste position, vitesse, paramètre de freinage, allumage ou non des feux, pour une meilleure complexité, en  $O(t^2 + nt)$ .

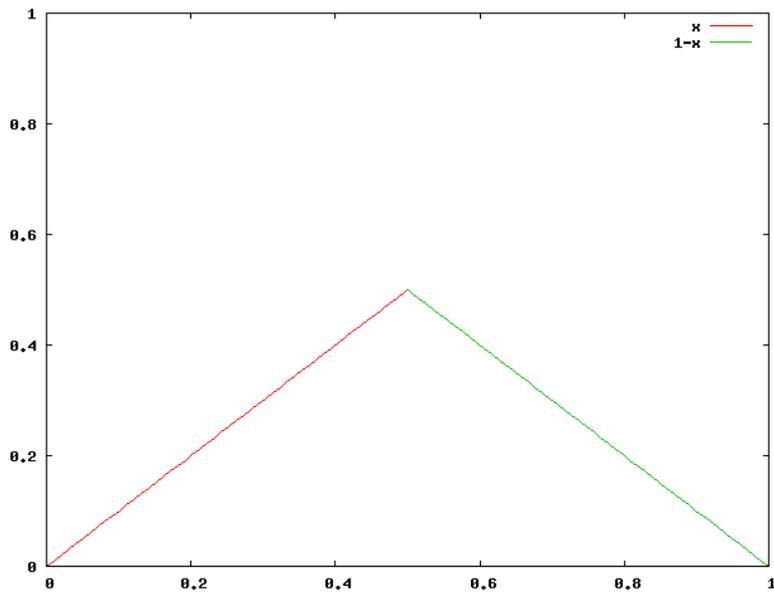
Ceci étant posé, nous allons pouvoir étudier les modèles sur les deux exemples de la route circulaire sans et avec retardateur.

### 3 Cas d'une route circulaire sans retardateur

Dans les deux méthodes employées, l'espace-temps est discrétisé : nous allons donc représenter la route comme un ensemble de  $r$  cases pouvant ou non être occupées par des véhicules. On peut la modéliser à l'aide d'un réseau de Petri (à droite, la route correspondante) :

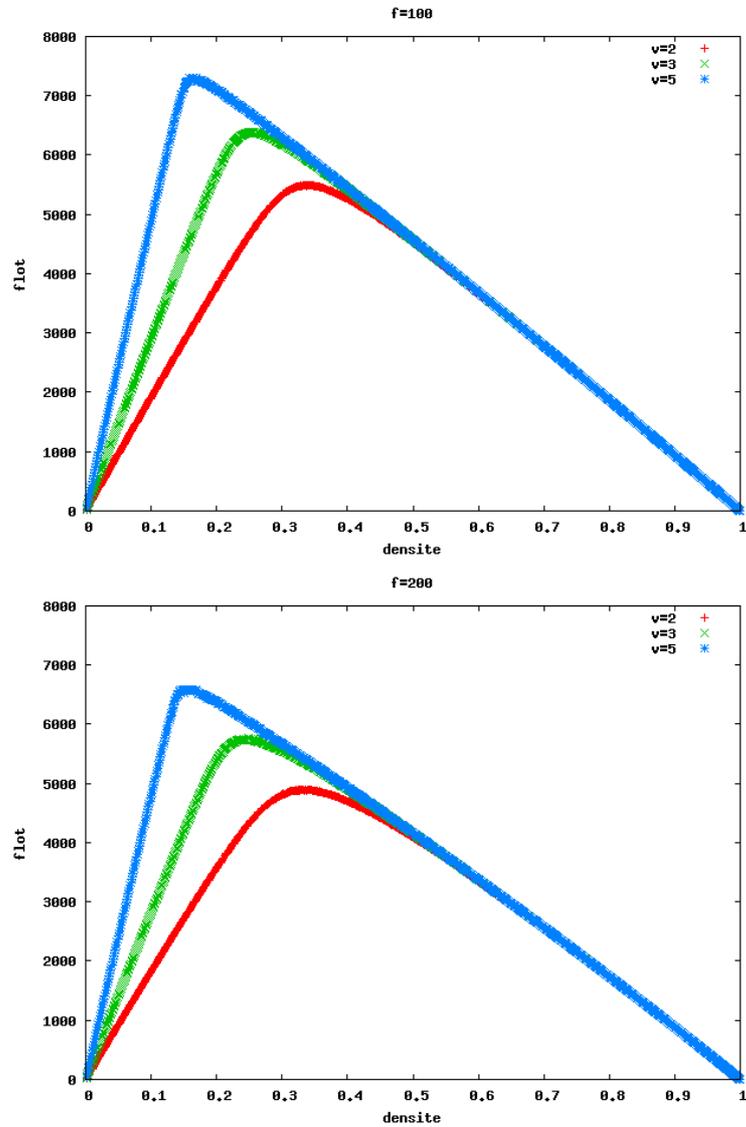


Chaque case de la route correspond à deux places : l'une externe contient un jeton lorsqu'il y a une voiture dans la case, l'autre interne en contient un lorsqu'il n'y en a pas. Pour qu'une transition s'active, *i.e.* pour qu'un véhicule avance, il faut donc qu'il y ait une voiture dans une case et aucun dans la précédente. Avec ce modèle, on peut calculer le flot moyen à terme  $\lambda = \min_{c \in C} \frac{|c|_a}{|c|_t}$  ; en raisonnant sur les trois types de circuits possibles, on trouve  $\lambda = \min(d, 1 - d)$  où  $d$  est la densité de véhicules, d'où le diagramme fondamental donnant le flux  $\lambda$  en fonction de la densité :

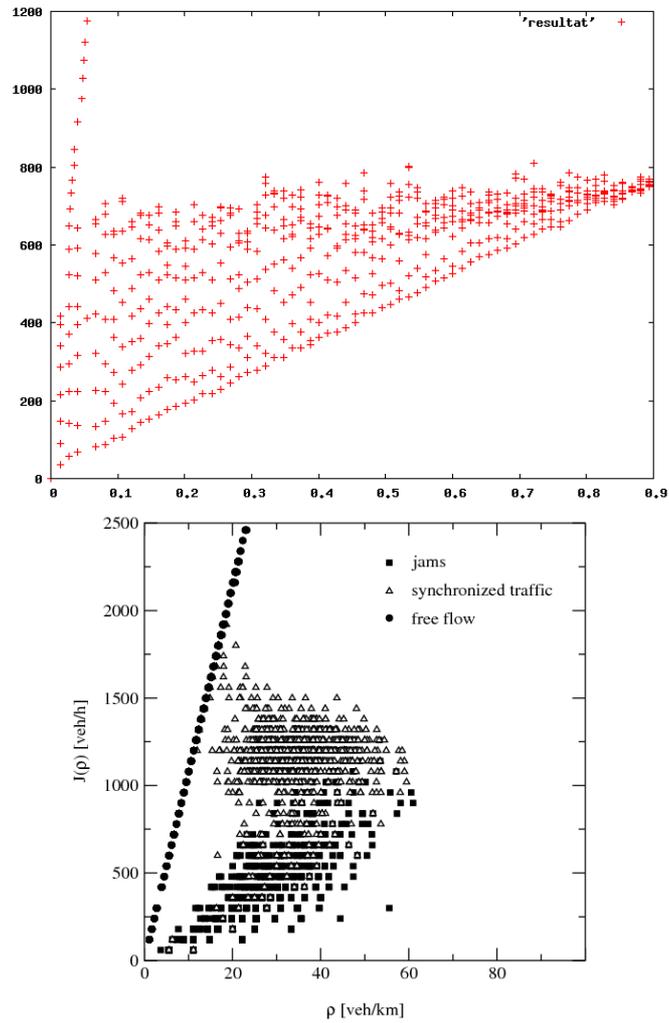


La branche rouge correspond à l'écoulement libre, la droite au régime embouteillé.

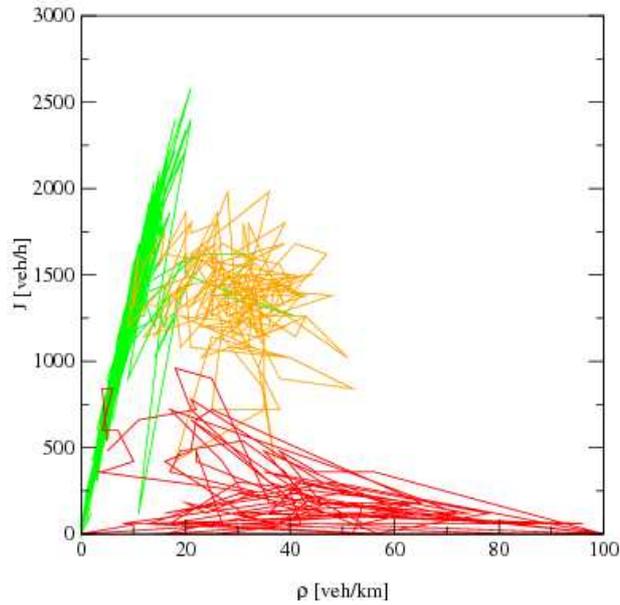
Avec les automates cellulaires, les résultats sont plus intéressants. Avec NaSch, on obtient :



On remarque que jouer sur la probabilité maximale de freinage  $f$  et sur la vitesse maximale permet d'adapter la courbe à la "réalité", mais on en reste loin. Le modèle BLM apporte lui une avancée significative dans notre compréhension du trafic (La deuxième figure, extraite de [2], identifie les phases par corrélation. Elle est plus précise car mieux implémentée. A noter que les repères sont différents.) :



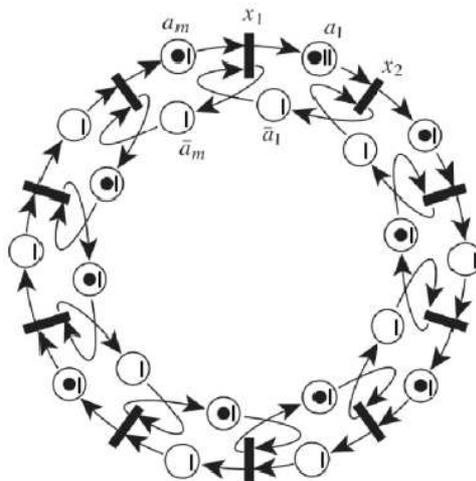
Que l'on peut comparer au diagramme empirique :



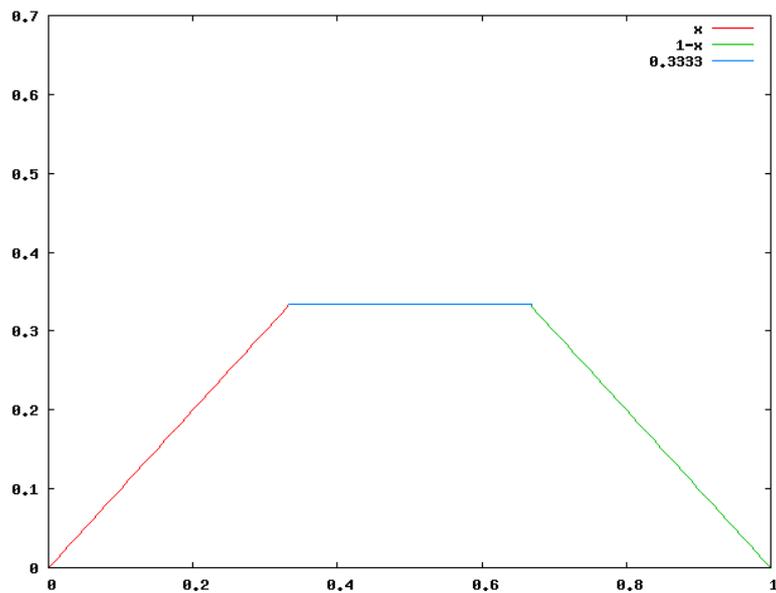
On observe ainsi l'apparition dans le diagramme fondamental d'un troisième régime, l'écoulement synchronisé, où les véhicules roulent vite mais avec une forte densité. Ceci montre deux choses : le caractère fondamental de l'anticipation dans la modélisation du trafic et la possibilité de modéliser simplement celui-ci de manière satisfaisante.

#### 4 Cas d'une route circulaire avec retardateur

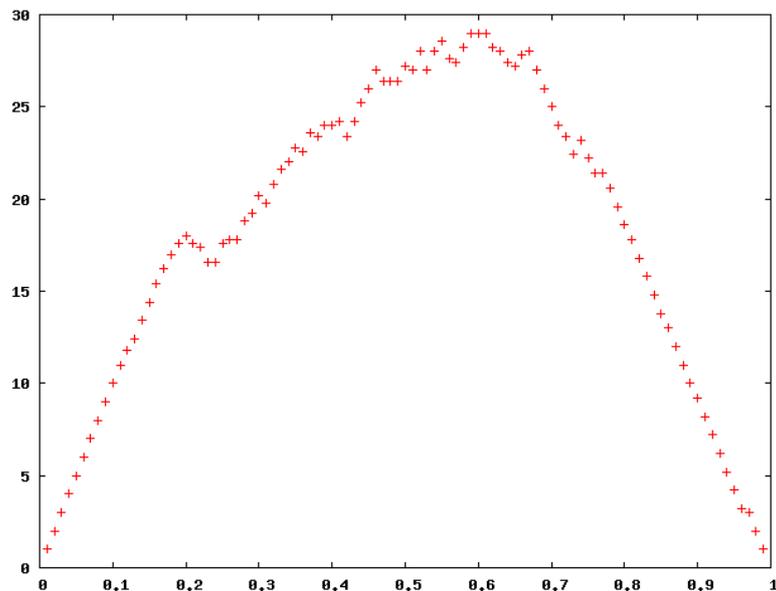
On place en case 1 un retardateur pour une unité de temps, qui modélise par exemple l'effet d'un feu de trafic. Pour les automates cellulaires, cela revient à modifier légèrement les règles. Pour le réseau de Petri, cela revient à prendre :



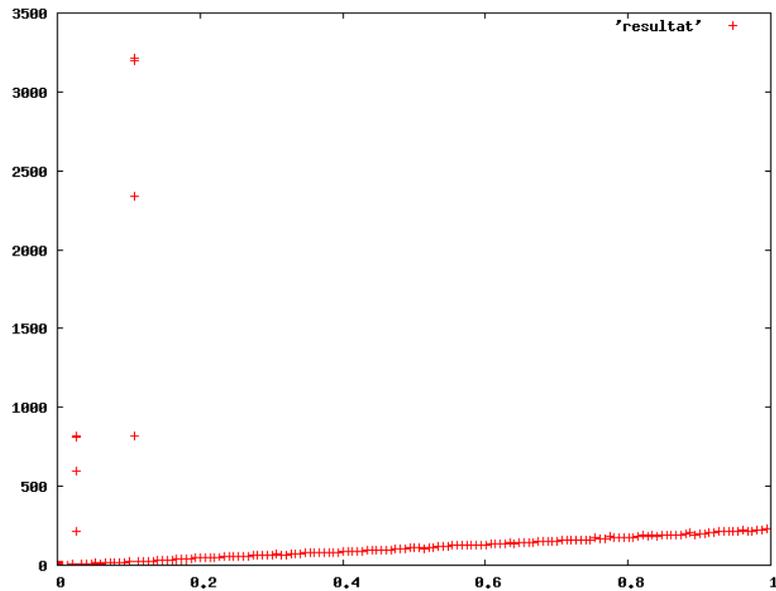
On calcule  $\lambda$  de manière similaire, en remarquant l'apparition d'un quatrième type de circuits correspondants à ceux qui passent par le retardateur, de poids minimal  $\frac{1}{3}$ , ce qui donne  $\lambda = \min(\frac{p}{m+1}, \frac{m-p}{m}, \frac{1}{3})$  et donc le diagramme fondamental suivant :



L'utilisation de NgSch donne un résultat assez similaire :



Alors que BLM, en implémentant l'anticipation des conducteurs, donne :



On constate qu'aux faibles densités il existe une branche d'écoulement libre, suggérée par quelques points ; aux densités "non pathologiques", l'anticipation permet la formation d'un flux quasi-linéaire lent. L'anticipation des conducteurs explique le changement radical du diagramme.

## 5 Conclusion

Nous avons étudié deux outils puissants dans le cadre du trafic routier. Si les réseaux de Petri et l'automate NaSch ne permettent qu'une approximation éloignée de la réalité, l'ajout de l'anticipation qui donne naissance au modèle BLM permet de rendre compte beaucoup plus précisément de la réalité, et montre le rôle essentiel de l'anticipation dans la modélisation du trafic routier.

## 6 Bibliographie

1. “La circulation mise en boîte”, de Cécile Appert-Rolland, La Recherche 409 (juillet 2007), pp 64-67
2. “Modélisation du trafic routier par des automates cellulaires”, Appert/Santen, Actes INRETS 100, Ecole d’automne de Modélisation du Trafic Automobile, 2002 (reprint 2007)  
*<http://www.lps.ens.fr/appert/articles/acproc3.ps.gz>*
3. “Introduction d’un temps de réaction dans un modèle simplifié de trafic : Emergence d’une métastabilité”, Appert/Santen, Actes Inrets n°90, Modélisation du trafic, pp 9-22, 2001  
*<http://www.lps.ens.fr/appert/articles/meta6.ps.gz>*
4. “Automate cellulaire”, Encyclopédie libre en ligne Wikipedia, version du 18/02/08,  
*[http://fr.wikipedia.org/wiki/Automate\\_cellulaire](http://fr.wikipedia.org/wiki/Automate_cellulaire)*
5. “Metastable states in cellular automata for traffic flow”, Barlovic/Santen/ Schadschneider/Schreckenberg, Eur. Phys. J., B5 :793, 1998 ,  
*<http://arxiv.org/pdf/cond-mat/9804170v1>*
6. “L’algèbre des sandwichs”, de Cohen/Gaubert/Quadrat, Pour la Science 328 (février 2005), pp 56-63
7. “Max-Plus algebra and system theory : where we are and where to go now”, Cohen/Gaubert/Quadrat, Annual Reviews in Control, 1999,  
*<http://www-rocq.inria.fr/metalau/quadrat/Systeme-Nantes.pdf>*
8. “Une introduction à l’algèbre (max,+)", S. Gaubert, présentation du séminaire IRISA, 19/09/1997,  
*<http://amadeus.inria.fr/gaubert/PAPERS/slides-twoup.ps>*
9. “Max-Plus Algebra and Applications to System Theory and Optimal Control”, JP Quadrat, Proceedings of the International Congress of Mathematicians , Zurich 1994, Birkhauser , 1995,  
*<http://www-rocq.inria.fr/metalau/quadrat/Zurich-94.pdf>*
10. “On Traffic Light Control of Regular Towns”, Cohen/Gaubert/Quadrat/ Mancinelli/Rofman, ALAPEDES meeting Delft, October 1999 and Rapport INRIA n. 4276 Septembre 2001,  
*<http://www-rocq.inria.fr/metalau/quadrat/transportRR.pdf>*
11. “A Minplus Derivation of the Fundamental Car-Traffic Law”, Lotito/Mancinelli/Quadrat, INRIA Research Report RR-4324 Nov. 2001  
*<http://www.inria.fr/rrrt/rr-4324.html>*  
and in IEEE Automatic Control V.50, N.5, p.699-705 May 2005  
*<http://www-rocq.inria.fr/metalau/quadrat/bouchonIEEE17.pdf>*